quindi

p -|- i a = — Vi F (a) £»••*<«-"***-
*) <j a ^ 27U ^ss-«/o

ovvero, pel teorema di FOURIER,

(14)
cioè

P + ^ = A>0 + <^x) -h ^oC«

Quest'equazione complessa, decomposta in due reali, determina completamente i due sistemi di curve *u* = cost., *v* = cost., in coordinate *p* e *q,* sistemi la cui natura dipende da quella della curva primitiva e del suo parametro *u :* questa stessa curva appartiene al sistema *v* = cost. e corrisponde al valore *v* = o.

Dalla costruzione infinitesimale che abbiamo effettuata emerge chiaramente che i due sistemi *u* = cost., *v* = cost. si tagliano dovunque sotto l'angolo costante X Ciò è confermato dall'osservare che l'equazione (14) da

dp + dq² = (moàFy(du² + 2dudvcosì + dv²*),* e quindi

espressione che, paragonata alla (i), mostra essere appunto "*X* l'angolo delle curve *u* = cost., *v* = cost. Anzi se si pon mente alla immediata deduzione di questo risultato dalla sola equazione (14), si vede che ha luogo il seguente teorema : *se p e q sono coordinate isometriche di una superficie,, eguagliando il binomio p -}- iq ud una qualunque /unione di u* -f~ *ve (dove u, v sono parametri variabili e "X una costante reale), si ottengono due sistemi di curve u* = cost., *v* = cost. *che si tagliano dovunque sotto l'angolo* X Da questo teorema, nel caso particolare in cui >, — — , si ottiene una notissima proposizione di GAUSS. La restrizione introdotta nella precedente analisi, col supporre che la primitiva curva *v* = o fosse chiusa, non è essenziale al teorema precedente, come appare dall'ultima sua dimostrazione.

Il qual teorema dev'essere completato coll'osservazione che *le curve del sistema v* = cost. *sono, per una stessa funzione F di u* -f- *v* e[a], *indipendenti dall'angolo* | cosicché da una medesima funzione si deduce un sistema di curve, accompagnato dai sistemi delle sue trajettorie sotto tutti gli angoli possibili. Ci dispensiamo dal dimostrare questa proprietà, la quale risulta con evidenza dalla costruzione infinitesimale effettuata. Così non è necessario dimostrare che le curve *v* = cost. sono isometriche,

BELTRAMI, tomo I. 4*